EXPLIZITE BESTIMMUNG DER RANDFLÄCHEN DES FUNDAMENTALBEREICHES DER MODULGRUPPE ZWEITEN GRADES

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

R. UNIV
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

vorgelegt von
Erhard Gottschling
aus Lodz

Göttingen 1959

Sonderdruck aus Mathematische Annalen Bd. 138, Heft 2

EXPLIZITE BESTIMMUNG DER RANDFLÄCHEN DES FUNDAMENTALBEREICHES DER MODULGRUPPE ZWEITEN GRADES

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Erhard Gottschling
aus Lodz

Göttingen 1959

Sonderdruck aus Mathematische Annalen Bd. 138, Heft 2

D 7

Referent: Prof. C. L. Siegel
Korreferent: Prof. M. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung: 25.2.59

Gottschling, E.
Math. Annalen 138, 103—124 (1959)

Explizite Bestimmung der Randflächen des Fundamentalbereiches der Modulgruppe zweiten Grades*

Von

Erhard Gottschling in Göttingen

Die in der Einleitung zunächst zusammengestellten Ergebnisse sind in den beiden Arbeiten [1] und [2] von C. L. Siegel zu finden.

Für jedes natürliche n werde der Bereich aller n-reihigen komplexen symmetrischen Matrizen $Z = X + iY$, deren Imaginärteil Y positiv definit ist, mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Die allgemeinste umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich, die in jedem der $\frac{1}{2}n(n+1)$ unabhängigen Elemente z_{kl} von Z $(k, l = 1, \ldots, n)$ analytisch ist, hat die Gestalt

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \tag{1}$$

Dabei sind A, B, C, D reelle n-reihige Matrizen, die sich in der Form

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2}$$

zu einer $2n$-reihigen symplektischen Matrix zusammenfassen lassen. Ist E die n-reihige Einheitsmatrix und $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, so bedeutet die Symplektizität von M die Bedingung

$$MJM' = J. \tag{3}$$

Zwei symplektische Matrizen M und M_1 liefern genau dann dieselbe Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf sich, wenn $M_1 = \pm M$ ist. Die homogene Modulgruppe n-ten Grades besteht aus allen $2n$-reihigen symplektischen Matrizen mit ganzzahligen Elementen. Die inhomogene Modulgruppe Γ ist dann die Faktorgruppe der homogenen Modulgruppe nach der Untergruppe, die aus $\pm E_{2n}$ besteht, wobei E_{2n} die $2n$-reihige Einheitsmatrix ist. Wird Γ aufgrund von (1) als Gruppe von Abbildungen von $\mathfrak{H}$ auf sich gedeutet, so ist sie in $\mathfrak{H}$ diskontinuierlich. Es erhebt sich die Frage nach einem Fundamentalbereich von Γ in $\mathfrak{H}$. Diese Frage wurde zuerst von C. L. Siegel behandelt. Um sein Ergebnis zu formulieren, wird der Begriff des teilerfremden symmetrischen Matrizenpaares benötigt: Ein Paar von zwei n-reihigen Matrizen C und D mit ganzzahligen Elementen heißt symmetrisch, wenn $CD' = DC'$ gilt. Es heißt teilerfremd, wenn aus der Voraussetzung, die Elemente von GC und GD seien ganzzahlig, stets folgt, daß die n-reihige Matrix G selbst ganzzahlige Elemente besitzt. Die teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare stehen in enger Beziehung zu

*) Diese Arbeit wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Göttingen als Dissertation angenommen.

den Modulmatrizen: Aus (3) folgt nämlich, daß z. B. die zweite Matrizenzeile (CD) einer jeden Modulmatrix (2) symmetrisch und teilerfremd ist. Umgekehrt kann man auch jedes teilerfremde symmetrische Paar C, D zu einer Modulmatrix (2) ergänzen.

Im folgenden wird die Determinante einer komplexen Matrix W mit $\det W$ bezeichnet, der Absolutbetrag einer komplexen Zahl z mit $|z|$. Für den Absolutbetrag $|\det W|$ der Determinante von W soll kurz $\operatorname{abs} W$ geschrieben werden.

Der Bereich $\mathfrak{F}$ bestehe nun aus allen Punkten $Z = X + iY$ von $\mathfrak{H}$, die den folgenden Bedingungen genügen:

(4) $\frac{1}{2} \geqq x_{kl} \geqq -\frac{1}{2}$, *wobei* $X = (x_{kl})$ $(k, l = 1, \ldots, n)$;

(5) Y *nach* MINKOWSKI *reduziert*;

(6) $\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1$ C, D *teilerfremd und symmetrisch*.

Dann ist $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich von Γ in $\mathfrak{H}$. Um zu entscheiden, wann zwei der Ungleichungen (6) verschiedene Bedingungen für Z darstellen, werden die teilerfremden symmetrischen Paare noch in Klassen von zueinander assoziierten Paaren eingeteilt: Zwei Paare C, D und C_1, D_1 heißen assoziiert, wenn es eine n-reihige unimodulare Matrix U mit der Eigenschaft

$$(C_1 D_1) = U(CD)$$

gibt. In [2] wird gezeigt, daß die Beziehung

$$\operatorname{abs}(C_1 Z + D_1) = \operatorname{abs}(CZ + D)$$

genau dann identisch in Z gilt, wenn C, D und C_1, D_1 assoziiert sind. Also liefert (6) genau so viele verschiedene Ungleichungen, wie es Klassen assoziierter Paare C, D gibt. Diejenigen Ungleichungen (6), für die C, D zu $0, E$ assoziiert ist, stellen allerdings keine Bedingung für Z dar und sollen daher fortgelassen werden. Da es unendlich viele Klassen assoziierter Paare C, D gibt, und da die Zahl der Minkowskischen Reduktionsbedingungen ebenfalls unendlich groß ist, ist $\mathfrak{F}$ zunächst durch unendlich viele Ungleichungen definiert. Nun beweist aber MINKOWSKI in der Arbeit [3] oder auch SIEGEL in der Arbeit [4], daß sich sämtliche Reduktionsbedingungen schon aus endlich vielen von ihnen ergeben. Ferner beweist SIEGEL in [1] und [2], daß sich unter der Voraussetzung von (4) und (5) sämtliche Ungleichungen (6) aus endlich vielen dieser Ungleichungen ergeben. Für beliebiges n bleibt jedoch die Frage offen, welche Ungleichungen wirklich notwendig sind. Dabei bedeutet die Notwendigkeit einer Ungleichung die Existenz eines Punktes aus $\mathfrak{H}$, in welchem diese eine Ungleichung nicht erfüllt ist, die übrigen Ungleichungen aber alle erfüllt sind. Für $n = 1$ kennt man diese notwendigen Ungleichungen; ist nämlich $z = x + iy$ die eine komplexe Veränderliche im Falle $n = 1$, so sind es die drei Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \geqq x \geqq -\frac{1}{2}, \quad |z| \geqq 1 .$$

Dieses Ergebnis wurde zuerst von R. DEDEKIND in [5] veröffentlicht. Es ist

das Ziel der vorliegenden Arbeit, die Frage nach den notwendigen Ungleichungen im Falle $n = 2$ zu beantworten. Setzt man in diesem Falle

$$Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_3 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 & y_3 \\ y_3 & y_2 \end{pmatrix},$$

so liefert (4) die sechs Ungleichungen

$$\frac{1}{2} \geqq x_1, x_2, x_3 \geqq -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Sämtliche Minkowskischen Reduktionsbedingungen sind bekanntlich, wie u. a. in [3] gezeigt wird, eine Folge der drei Ungleichungen

$$y_2 \geqq y_1 \geqq 2y_3 \geqq 0\,. \tag{8}$$

Im ersten Paragraphen der vorliegenden Arbeit wird der folgende Satz bewiesen:

Satz 1: Unter der Voraussetzung von (7) *und* (8) *ergeben sich im Falle* $n = 2$ *alle Ungleichungen* (6) *bereits aus 19 dieser Ungleichungen, nämlich aus vier Ungleichungen, in denen Rang* $C = 1$ *ist:*

$$|z_1| \geqq 1\,, \quad |z_2| \geqq 1\,, \quad |z_1 + z_2 - 2z_3 + e| \geqq 1 \qquad (e = \pm 1)\,, \tag{9}$$

und aus 15 Ungleichungen, in denen Rang $C = 2$ *ist:*

$$\operatorname{abs}(Z + S) \geqq 1\,, \tag{10}$$

wobei für S *die 15 Matrizen*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix}$$

einzusetzen sind.

Im zweiten Paragraphen wird die Notwendigkeit der 28 Ungleichungen (7), (8), (9), (10) für die Definition von $\mathfrak{F}$ bewiesen. Wir formulieren dieses Ergebnis als

Satz 2: Zu jeder der 28 Ungleichungen (7), (8), (9), (10) *gibt es einen Punkt von* $\mathfrak{H}$, *in welchem diese Ungleichung nicht erfüllt ist, die übrigen 27 Ungleichungen aber erfüllt sind. Geometrisch ausgedrückt: Von den fünfdimensionalen Flächen, die man erhält, wenn in den 28 Ungleichungen speziell das Gleichheitszeichen betrachtet wird, gehören fünfdimensionale Stücke zum Rande von* $\mathfrak{F}$.

§ 1. Überflüssige Ungleichungen

Mit C, D ist auch $-C, D$ teilerfremd und symmetrisch. Mit jedem Punkt $Z = X + iY$ von $\mathfrak{H}$ gehört auch der Punkt $-\overline{Z} = -X + iY$ zu $\mathfrak{H}$. Es gilt stets

$$\operatorname{abs}(CZ + D) = \operatorname{abs}(-C(-\overline{Z}) + D)\,. \tag{11}$$

Daraus folgt einmal, daß mit Z auch $-\overline{Z}$ zum Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ gehört, weil nämlich mit C, D auch $-C, D$ alle teilerfremden symmetrischen Matrizenpaare durchläuft und auf Grund von (11) die Ungleichungen $\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1$ und $\operatorname{abs}(-C(-\overline{Z}) + D) \geqq 1$ gleichbedeutend sind, und weil die Ungleichungen (4) und (5) beim Übergang von Z zu $-\overline{Z}$ erhalten bleiben. Es ergibt sich ferner

Lemma 1: Die Ungleichungen $\mathrm{abs}(CZ + D) \geqq 1$ *und* $\mathrm{abs}(-CZ + D) \geqq 1$ *sind entweder beide notwendig oder beide überflüssig für die Definition von* $\mathfrak{F}$.

Die Ungleichung $\mathrm{abs}(CZ + D) \geqq 1$ ist nämlich genau dann notwendig, wenn es eine Stelle Z_0 gibt, für die $\mathrm{abs}(CZ_0 + D) < 1$ ist, sonst aber alle Ungleichungen (4), (5), (6) erfüllt sind. Für die Stelle $-\overline{Z}_0$ gilt dann $\mathrm{abs}(-C(-\overline{Z}_0) + D) < 1$, während alle anderen Ungleichungen für $-\overline{Z}_0$ erfüllt sind.

Die letzten Betrachtungen galten für beliebiges n. Jetzt sei $n = 2$. Unter den Ungleichungen (6) kommen dann insbesondere die folgenden beiden vor:

$$|z_1| \geqq 1\,, \quad |z_2| \geqq 1\,. \tag{12}$$

Man erhält sie für die beiden teilerfremden symmetrischen Paare

$$C, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad C, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Ungleichungen (7), (8), (12) wird ein Bereich $\mathfrak{B}$ definiert, der $\mathfrak{F}$ enthält, und in welchem insbesondere

$$y_1^2 \geqq \frac{3}{4}\,, \qquad y_2^2 \geqq \frac{3}{4}\,, \qquad \det Y \geqq \frac{3}{4}\, y_1^2 \geqq \frac{9}{16} \tag{13}$$

gilt. Dieser Bereich $\mathfrak{B}$ wird im folgenden wiederholt benutzt werden.

Es sei C, D ein teilerfremdes symmetrisches Paar mit *Rang* $C = 1$. In diesem Falle gibt es zwei unimodulare Matrizen U und V, so daß

$$UCV = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (c > 0)$$

wird. Setzt man

$$UDV'^{-1} = \begin{pmatrix} d & d_1 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix},$$

so folgt aus $CD' = DC'$ die Bedingung $d_2 = 0$. Aus der Teilerfremdheit von C, D ergibt sich die Teilerfremdheit von c, d und $d_3 = \pm 1$. Ersetzt man noch U durch

$$\begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & d_3 \end{pmatrix} U\,,$$

so wird

$$UCV = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad UDV'^{-1} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Hieraus folgt, wenn die erste Zeile von V^{-1} mit (pq) bezeichnet wird:

$$\mathrm{abs}(CZ + D) = |c(z_1 p^2 + z_2 q^2 + 2 z_3 pq) + d|\,. \tag{15}$$

Dabei sind also p und q teilerfremd, und wir können offenbar noch $p > 0$ oder aber $p = 0, q = 1$ voraussetzen. Sind umgekehrt die vier Zahlen c, d, p, q mit

$$(c, d) = 1\,; \quad (p, q) = 1\,; \quad c > 0\,; \quad p > 0 \text{ oder } p = 0, q = 1 \tag{16}$$

vorgegeben, so ergänze man die Zeile (pq) zu einer unimodularen Matrix V^{-1}. Das Matrizenpaar

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V' \tag{17}$$

ist dann teilerfremd und symmetrisch, und es gilt *Rang* $C = 1$.

Wir zeigen noch, daß die Zuordnung zwischen den Klassen assoziierter Paare C, D mit *Rang* $C = 1$ und den vier ganzen Zahlen c, d, p, q mit den Eigenschaften (16) umkehrbar eindeutig ist. Ist neben V^{-1} auch V_1^{-1} eine unimodulare Matrix mit (pq) als erster Zeile, und wird analog zu (17) noch

$$C_1 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_1^{-1}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_1' \tag{18}$$

gesetzt, so folgen aus (17) und (18) die Gleichungen

$$C_1 = U_1 C, \quad D_1 = U_1 D,$$

wo U_1 die unimodulare Matrix

$$U_1 = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V_1' \, V'^{-1} \begin{pmatrix} d^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Also sind die Paare C_1, D_1 und C, D assoziiert. Durch Vorgabe von c, d, p, q ist somit die Klasse der zu C, D assoziierten Paare eindeutig bestimmt. Es sei umgekehrt C, D vorgegeben, und es gelte neben (14) auch entsprechend

$$U_0 C V_0 = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_0 D V_0'^{-1} = \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wo die erste Zeile von V_0^{-1} mit $(p_0 q_0)$ bezeichnet werde und für die vier ganzen Zahlen c_0, d_0, p_0, q_0 entsprechende Voraussetzungen gelten wie für c, d, p, q. Aus

$$U_0 U^{-1} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V_0^{-1} V$$

folgt dann wegen $c > 0$ und $c_0 > 0$ die Gleichung $c = c_0$. Außerdem ergibt sich

$$V_0^{-1} V = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ * & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet wegen der Voraussetzungen über p, q und p_0, q_0 insbesondere, daß die ersten Zeilen von V_0^{-1} und V^{-1} übereinstimmen. Beachten wir dann noch

$$U U_0^{-1} \begin{pmatrix} d_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V' V_0'^{-1},$$

so folgt $d_0 = d$.

Nach (15) ist also jeder Ungleichung

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 1 \qquad (\textit{Rang}\ C = 1)$$

umkehrbar eindeutig eine Ungleichung der Form

$$|c(z_1 p^2 + z_2 q^2 + 2 z_3 pq) + d| \geqq 1$$

zugeordnet, wo die ganzen Zahlen c, d, p, q den Bedingungen (16) genügen.

Die rechte Seite von (15) schätzen wir durch den Absolutbetrag des Imaginärteils ab:

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq c(y_1 p^2 + y_2 q^2 + 2 y_3 pq). \tag{19}$$

Aus $|pq| \leqq \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$ ergibt sich dann nach (8) und (13) für den ganzen

Bereich $\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$\text{abs}(CZ + D) \geqq \frac{1}{4}\sqrt{3}\, c(p^2 + q^2) \geqq \frac{1}{4}\sqrt{3}\,(p^2 + q^2). \tag{20}$$

Wenn $pq \neq 0$ ist, folgert man hieraus

$$\text{abs}(CZ + D) \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}c\,, \tag{21}$$

und dies gilt, wie man direkt aus (19) sieht, auch noch, falls $p = 0$ oder $q = 0$ ist. Wegen $(p, q) = 1$ können p und q nicht gleichzeitig verschwinden. Aufgrund der beiden letzten Ungleichungen (20) und (21) gilt im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ stets $\text{abs}(CZ + D) > 1$, falls nur $c \geqq 2$ oder $p^2 + q^2 \geqq 4$ ist. Daher sind von den Ungleichungen (6) mit ausgeartetem C höchstens diejenigen mit $c = 1$ und $p^2 + q^2 < 4$ notwendig (die beiden Ungleichungen (12) kommen unter diesen vor). Wegen (16) brauchen wir nur die Fälle

$$c = 1\,, \quad p, q = 1, 0;\ 0, 1;\ 1, 1;\ 1, -1$$

zu untersuchen. Der Fall $p, q = 1, 0$ liefert nach (15) die Beziehung

$$\text{abs}(CZ + D)^2 = |z_1 + d|^2 = (x_1 + d)^2 + y_1^2\,.$$

Wenn $d \neq 0$ ist, folgt im Bereich $\mathfrak{B}$ die Ungleichung $|x_1 + d| \geqq \frac{1}{2}$ und daher wegen $y_1^2 \geqq \frac{3}{4}$ auch $\text{abs}(CZ + D) \geqq 1$. Somit ist also höchstens die Ungleichung mit $d = 0$ notwendig, das ist die erste der Ungleichungen (12). Entsprechend zeigt man, daß sich im Falle $p, q = 0, 1$ höchstens die zweite der Ungleichungen (12) als notwendig erweist. Für $p, q = 1, 1$ gilt nach (19), (8), (13) im Bereich $\mathfrak{B}$ die Abschätzung

$$\text{abs}(CZ + D) \geqq y_1 + y_2 + 2y_3 \geqq \sqrt{3} > 1\,.$$

Die Ungleichungen mit $p, q = 1, 1$ sind daher sämtlich überflüssig. Ist schließlich $p, q = 1, -1$, so gilt nach (15) die Gleichung

$$\text{abs}(CZ + D)^2 = (x_1 + x_2 - 2x_3 + d)^2 + (y_1 + y_2 - 2y_3)^2\,.$$

Für $|d| \geqq 3$ ist im Bereich $\mathfrak{B}$ stets $|x_1 + x_2 - 2x_3 + d| \geqq 1$, also auch $\text{abs}(CZ + D) \geqq 1$. Daher sind in diesem Falle höchstens die Ungleichungen

$$|z_1 + z_2 - 2z_3 + d| \geqq 1 \qquad (-2 \leqq d \leqq 2) \tag{22}$$

notwendig. Von diesen Ungleichungen werden sich im nächsten Lemma noch diejenigen mit $d = 0$ und $d = \pm 2$ als überflüssig erweisen, so daß tatsächlich von allen Ungleichungen (6) mit *Rang* $C = 1$ höchstens die vier Ungleichungen (9) notwendig sind.

Wegen $y_1 \geqq 2y_3$ ist $y_1 + y_2 - 2y_3 \geqq y_2$. Daher sind die Ungleichungen (22) sicherlich für $y_2 \geqq 1$ erfüllt. Es sei $\mathfrak{B}_0$ derjenige Teil von $\mathfrak{B}$, in welchem $y_2 \leqq 1$ ist. Von den Ungleichungen (22) mit $d = \pm 2$ brauchte nun aufgrund von Lemma 1 eigentlich nur etwa diejenige mit $d = 2$ untersucht zu werden. Es ist jedoch nicht mühsamer, beide Fälle zugleich zu behandeln. Die Ungleichungen (22) mit $d = -2e$ $(e = \pm 1)$ sind nämlich sicher dann erfüllt, wenn

$|x_1 + x_2 - 2x_3 - 2e| \geqq \frac{1}{2}$ ist. Ist dagegen $|x_1 + x_2 - 2x_3 - 2e| \leqq \frac{1}{2}$, so folgt nach (7) in $\mathfrak{B}$ für $e = 1$ die Bedingung

$$-\frac{1}{4} \geqq x_3 \geqq -\frac{1}{2}, \tag{23}$$

und für $e = -1$ die Bedingung

$$\frac{1}{2} \geqq x_3 \geqq \frac{1}{4}. \tag{24}$$

Es sei $\mathfrak{B}_1$ derjenige Teil von $\mathfrak{B}_0$, in welchem (23) gilt, und $\mathfrak{B}_{-1}$ derjenige Teil von $\mathfrak{B}_0$, in welchem (24) gilt.

Lemma 2: Im Bereich $\mathfrak{B}_e$ $(e = -1, 0, 1)$ *ist die Ungleichung*

$$|z_1 + z_2 - 2z_3 - 2e| \geqq 1$$

eine Folge von $\operatorname{abs}(Z + eS) \geqq 1$ *mit* $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Beweis: Die Differenz

$$F_e = |z_1 + z_2 - 2z_3 - 2e|^2 - \operatorname{abs}(Z + eS)^2$$

geht aus der Differenz

$$F_0 = F = |z_1 + z_2 - 2z_3|^2 - \operatorname{abs} Z^2$$

dadurch hervor, daß x_3 durch $e + x_3$ ersetzt wird. Im Falle $e = 1$ genügt x_3 der Bedingung (23). In diesem Falle gilt für $e + x_3$ die Ungleichung $\frac{3}{4} \geqq e + x_3 \geqq \frac{1}{2}$. Im Falle $e = -1$ genügt x_3 der Bedingung (24). Daher gilt in diesem Falle für $e + x_3$ die Ungleichung $-\frac{1}{2} \geqq e + x_3 \geqq -\frac{3}{4}$. Für den Beweis von Lemma 2 genügt es deswegen zu zeigen, daß $F \geqq 0$ ist in demjenigen Bereich $\mathfrak{B}^*$, der aus $\mathfrak{B}_0$ hervorgeht, indem die Bedingung $|x_3| \leqq \frac{1}{2}$ durch $|x_3| \leqq \frac{3}{4}$ ersetzt wird.

Weil wegen (12) für die zweite Ableitung

$$F_{x_1 x_1} = 2 - 2(x_2^2 + y_2^2) \leqq 0$$

gilt, ist F als Funktion von x_1 nach unten konvex. Wenn daher $F \geqq 0$ für $x_1 = \pm \frac{1}{2}$ erfüllt ist, dann auch für $|x_1| \leqq \frac{1}{2}$. Da außerdem auch

$$F_{x_2 x_2} = 2 - 2(x_1^2 + y_1^2) \leqq 0$$

ist und F ungeändert bleibt, wenn Z durch $-\overline{Z}$, also X durch $-X$ ersetzt wird, genügt es, die beiden Fälle

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

zu betrachten. Hierbei wird auch noch benutzt, daß $\mathfrak{B}^*$ bei der Substitution $Z \to -\overline{Z}$ in sich übergeht. Setzen wir im ersten Falle $x = (1 - 2x_3)^2$, $e = -1$

und im zweiten Falle $x = 4x_3^2$, $e = 1$, so wird in beiden Fällen

$$F = x + (y_1 + y_2 - 2y_3)^2 - \left(\det Y + x_3^2 + \frac{e}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}(y_2 - ey_1 - 4x_3y_3)^2 .$$

Wir zeigen zuerst, daß $F_{y_3} \leqq 0$ ist. Setzen wir

$$H = 4y_3\left(\det Y + \frac{e}{4}\right), \qquad K = 2x_3(y_2 - ey_1 - 2x_3y_3) ,$$

so folgt in ganz $\mathfrak{B}^*$ für die betrachtete Ableitung:

$$F_{y_3} = -4(y_1 + y_2 - 2y_3) + H + K \leqq -4y_2 + H + K .$$

Für $|x_3| \leqq \frac{1}{2}$ gilt $K \leqq y_2 - ey_1$, außerdem $H \leqq 2y_1\left(1 + \frac{e}{4}\right)$. Daher

$$F_{y_3} \leqq -4y_2 + 2y_1\left(1 + \frac{e}{4}\right) + y_2 - ey_1 < 0 .$$

Für $\frac{1}{2} \leqq |x_3| \leqq \frac{3}{4}$ schätzen wir etwas anders ab:

$$H \leqq 4y_3\left(1 + \frac{e}{4}\right), \quad K \leqq \frac{3}{2}(y_2 - ey_1) - y_3 .$$

Damit ergibt sich

$$F_{y_3} \leqq -4y_2 + y_3(3 + e) + \frac{3}{2}(y_2 - ey_1) \leqq 0 .$$

Also ist F als Funktion von y_3 monoton fallend und nimmt daher den minimalen Wert für den größtmöglichen Wert von y_3, d. h. für $y_3 = \frac{1}{2}y_1$ an. Dafür wird

$$F = x + y_2^2 - \left(y_1y_2 - \frac{1}{4}y_1^2 + x_3^2 + \frac{e}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}(y_2 - ey_1 - 2x_3y_1)^2 .$$

Wir zeigen jetzt, daß auch $F_{y_1} \leqq 0$ ist. Setzen wir

$$L = \frac{1}{2}(e + 2x_3)(y_2 - ey_1 - 2x_3y_1) ,$$

so wird

$$F_{y_1} = -(2y_2 - y_1)\left(y_1y_2 - \frac{1}{4}y_1^2 + x_3^2 + \frac{e}{4}\right) + L \leqq -y_2\left(\frac{1}{2} + \frac{e}{4}\right) + L .$$

Für $e = -1$ und $\frac{1}{2} \geqq x_3 \geqq -\frac{3}{4}$ gilt $L \leqq 0$, für $e = -1$ und $\frac{3}{4} \geqq x_3 \geqq \frac{1}{2}$ jedenfalls $L \leqq \frac{1}{4}y_2$, also für $e = -1$ stets $F_{y_1} \leqq 0$. Für $e = 1$ und $\frac{3}{4} \geqq |x_3| \geqq \frac{1}{2}$ wird $L \leqq 0$, für $e = 1$ und $\frac{1}{2} \geqq x_3 \geqq 0$ jedenfalls $L \leqq y_2 - y_1$, für $e = 1$ und $0 \geqq x_3 \geqq -\frac{1}{2}$ schließlich $L \leqq \frac{1}{2}y_2$. Beachten wir $1 \geqq y_2 \geqq y_1 \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$, so folgt auch für $e = 1$ stets $F_{y_1} < 0$. Somit nimmt F den minimalen Wert für den größtmöglichen Wert von y_1, d. h. für $y_1 = y_2$ an. Dafür wird

$$F = x + y_2^2 - \left(\frac{3}{4}y_2^2 + x_3^2 + \frac{e}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}y_2^2(1 - e - 2x_3)^2 .$$

Wir zeigen endlich auch noch, daß $F_{y_2} \leqq 0$ ist:

$$F_{y_2} = 2y_2 - 3y_2\left(\frac{3}{4}y_2^2 + x_3^2 + \frac{e}{4}\right) - \frac{1}{2}y_2(1 - e - 2x_3)^2 .$$

ür $e = 1$ folgt sofort $F_{y_2} < 0$. Für $e = -1$ wird

$$y_2^{-1} F_{y_2} = -3\left(\frac{3}{4}y_2^2 - \frac{1}{4}\right) - 5x_3^2 + 4x_3 .$$

eil aber für alle x_3 die Ungleichung $4x_3 - 5x_3^2 \leqq \frac{4}{5}$ gilt, folgt auch in diesem alle $F_{y_2} < 0$. Also nimmt F den minimalen Wert für $y_2 = 1$ an. Im Falle $e = 1$ halten wir damit

$$F = 4x_3^2 + 1 - (1 + x_3^2)^2 - x_3^2 = x_3^2 - x_3^4 \geqq 0 ,$$

eil ja jedenfalls $|x_3| \leqq 1$ ist. Für $e = -1$ erhalten wir

$$F = (1 - 2x_3)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2} + x_3^2\right)^2 - (1 - x_3)^2 = \frac{3}{4} - 2x_3 + 2x_3^2 - x_3^4 .$$

ir bilden die Ableitung

$$F_{x_3} = -2 + 4x_3(1 - x_3^2)$$

nd wollen $F_{x_3} \leqq 0$ beweisen. Dies ist sicher für $0 \geqq x_3 \geqq -\frac{3}{4}$ richtig. Für des Intervall $0 \leqq a \leqq x_3 \leqq b \leqq 1$ gilt ferner die Abschätzung

$$4x_3(1 - x_3^2) \leqq 4b(1 - a^2) .$$

enden wir das in den drei Fällen $a, b = 0, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}; \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ an, so finden ir stets $F_{x_3} \leqq 0$. Also nimmt F den minimalen Wert für $x_3 = \frac{3}{4}$ an. Dafür wird

$$F = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{9}{8} - \frac{81}{256} > 0 .$$

amit ist Lemma 2 bewiesen.

Wir wenden uns nun dem Fall *Rang* $C = 2$ zu. In diesem Falle können wir

$$\operatorname{abs}(CZ + D) = \operatorname{abs} C \cdot \operatorname{abs}(Z + C^{-1}D)$$

hreiben. Setzen wir $R = X + C^{-1}D$, so ist R symmetrisch. Weil Y positiv efinit ist, gibt es daher eine reelle Matrix G mit

5) $$Y = GG', \quad R = GHG', \quad H = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} .$$

s wird

$$R + iY = G(H + iE)G'$$

nd daher

6) $$\operatorname{abs}(CZ + D)^2 = \det C^2 \cdot \det Y^2 \cdot (h_1^2 + 1)(h_2^2 + 1) .$$

ür $\operatorname{abs} C \geqq 2$ folgt im ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ wegen (13) die Abschätzung

$$\operatorname{abs}(CZ + D) \geqq 2 \cdot \frac{9}{16} > 1 .$$

s sind daher höchstens die Ungleichungen mit $\det C = \pm 1$ notwendig. Für ese ist also C unimodular; indem eventuell noch C, D durch ein assoziiertes

Paar ersetzt wird, kann $C, D = E$, S angenommen werden, wo S eine symmetrische Matrix mit ganzzahligen Elementen ist. Es handelt sich dann darum noch die Ungleichungen

$$\text{abs}(Z + S) \geqq 1 \tag{27}$$

zu untersuchen. Setzen wir

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 \\ g_4 & g_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$$

und beachten $R = X + S$, so schreibt sich (25) folgendermaßen in Komponentenform:

$$y_1 = g_1^2 + g_3^2, \quad y_2 = g_4^2 + g_2^2, \quad y_3 = g_1 g_4 + g_2 g_3$$

und

$$x_1 + s_1 = h_1 g_1^2 + h_2 g_3^2, \quad x_2 + s_2 = h_1 g_4^2 + h_2 g_2^2, \quad x_3 + s_3 = h_1 g_1 g_4 + h_2 g_2 g_3 .$$

Setzen wir ferner $Max\,(|h_1|, |h_2|) = h$ und beachten

$$|g_1 g_4| + |g_2 g_3| \leqq \frac{1}{2}(g_1^2 + g_4^2 + g_2^2 + g_3^2) = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \leqq y_2 ,$$

so folgt

$$|x_k + s_k| \leqq y_2 h \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Wäre nun für einen der Werte $k = 1, 2, 3$ die Ungleichung $|s_k| \geqq 2$ erfüllt, so folgte wegen $|x_k| \leqq \frac{1}{2}$ für h die Abschätzung $y_2 h \geqq \frac{3}{2}$, also nach (26) die Abschätzung

$$\text{abs}(Z + S)^2 \geqq \det Y^2 \left(1 + \frac{9}{4} y_2^{-2}\right) = (y_1 - y_3^2 y_2^{-1})^2 \left(y_2^2 + \frac{9}{4}\right) > 1 .$$

Daher sind von den Ungleichungen (27) höchstens diejenigen notwendig, in denen $|s_1|, |s_2|, |s_3| \leqq 1$ ist. Das sind außer den Ungleichungen (10) noch genau diejenigen mit

$$S = \begin{pmatrix} e & e \\ e & -e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & -e \\ -e & -e \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$S = \begin{pmatrix} e & -e \\ -e & e \end{pmatrix}, \tag{29}$$

$$S = \begin{pmatrix} e & -e \\ -e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -e \\ -e & e \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$S = \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix}, \tag{31}$$

wo für e überall die beiden Möglichkeiten $e = \pm 1$ einzutragen sind. Aufgrund des folgenden Lemmas erweisen sich die Ungleichungen (27) in den Fällen (28), (29), (30) als überflüssig.

Lemma 3: In den Fällen (28), (29), (30) *gilt im Bereich* $\mathfrak{B}$ *überall* $\text{abs}(Z + S) \geqq 1$.

Beweis: Da mit $Z = X + iY$ auch $-\overline{Z} = -X + iY$ zu $\mathfrak{B}$ gehört, genügt es in jedem Falle nur $e = 1$ zu betrachten. In dem Falle (28) gilt dann wegen $|x_k| \leqq \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3)$ die Ungleichung

$$\det(X + S) = (x_1 + 1)(x_2 - 1) - (x_3 \pm 1)^2 \leqq -\frac{1}{2} .$$

Wenn wir daher den Absolutbetrag $\operatorname{abs}(Z+S)$ durch den Absolutbetrag des Realteils von $\det(Z+S)$ abschätzen und noch (13) benutzen, folgt

$$\operatorname{abs}(Z+S) \geqq |\det(X+S) - \det Y| \geqq \frac{1}{2} + \frac{9}{16} > 1 .$$

Im Falle (29) untersuchen wir den Ausdruck

(32) $$F = \operatorname{abs} Z^2 = (y_1 y_2 - y_3^2 - x_1 x_2 + x_3^2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2 x_3 y_3)^2$$

für $x_1, x_2 \geqq \frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2} \geqq x_3$. Zunächst gilt wegen $y_3 \geqq 0$ und $y_2 \geqq y_1 \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Abschätzung

$$F \geqq (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \geqq \frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 .$$

Für $x_1 + x_2 \geqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ folgt daher $F \geqq 1$. Ist dagegen $x_1 + x_2 \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$, so folgt $x_1 x_2 \leqq \frac{1}{3}\sqrt{3}$, weil das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen höchstens gleich dem arithmetischen ist. Deswegen gilt für den Realteil von $-\det Z$ die Abschätzung

$$y_1 y_2 - y_3^2 - x_1 x_2 + x_3^2 > \frac{3}{4} - x_1 x_2 > 0 ,$$

und daher

$$F \geqq \left(\frac{3}{4} - x_1 x_2\right)^2 + \frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 = \frac{9}{16} + x_1^2 x_2^2 + \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2) \geqq 1 .$$

Für die Behandlung des Falles (30) ersetzen wir $\mathfrak{B}$ durch den Bereich $\mathfrak{B}'$, welcher durch die Ungleichungen $|x_k| \leqq \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, 3)$ und

(33) $$y_3 \geqq 0 , \quad y_1, y_2 \geqq 2 y_3 , \quad y_1, y_2 \geqq \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

definiert ist. Der Bereich $\mathfrak{B}'$ enthält $\mathfrak{B}$ und hat ebenfalls die Eigenschaft, mit $Z = X + iY$ auch den Punkt $-\overline{Z} = -X + iY$ zu enthalten. Ferner geht aber $\mathfrak{B}'$ auch in sich über, wenn die beiden Variablen z_1, z_2 miteinander vertauscht werden. Wenn wir daher die Ungleichung $\operatorname{abs}(Z+S) \geqq 1$ in $\mathfrak{B}'$ für den Fall $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ bewiesen haben, dann gilt sie in $\mathfrak{B}'$ auch für den Fall $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Also genügt es zu zeigen, daß der Ausdruck (32) unter der Voraussetzung von (33) und

(34) $$\frac{3}{2} \geqq x_1 \geqq \frac{1}{2} , \quad \frac{1}{2} \geqq x_2 \geqq -\frac{1}{2} , \quad -\frac{1}{2} \geqq x_3 \geqq -\frac{3}{2}$$

stets der Ungleichung $F \geqq 1$ genügt. Zunächst ergeben sich aus (33) und (34) für die Ableitungen von F nach y_1 und y_2 die Abschätzungen

$$F_{y_1} = 2 y_2 (y_1 y_2 - y_3^2 + x_3^2) + 2 y_1 x_2^2 - 4 x_2 x_3 y_3 > 0 ,$$
$$F_{y_2} = 2 y_1 (y_1 y_2 - y_3^2 + x_3^2) + 2 y_2 x_1^2 - 4 x_1 x_3 y_3 > 0 .$$

Der Ausdruck F nimmt also den minimalen Wert für die kleinstmöglichen

Werte von y_1 und y_2 an. Diese sind nach (33) entweder

$$y_1 = y_2 = 2y_3 \quad \textit{falls} \quad y_3 \geqq \frac{1}{4}\sqrt{3} \tag{35}$$

oder

$$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \quad \textit{falls} \quad y_3 \leqq \frac{1}{4}\sqrt{3}. \tag{36}$$

Wird F als Funktion von x_3 betrachtet, so nimmt F in den beiden Fällen (35) und (36), wie man leicht aus (32) sieht, den minimalen Wert für $x_3 = -\frac{1}{2}$ an. Im Falle (35) ergibt sich dafür

$$F = \left(\frac{1}{4} + 3y_3^2 - x_1x_2\right)^2 + y_3^2(2x_1 + 2x_2 + 1)^2. \tag{37}$$

Im Falle (36) erhalten wir

$$F = (1 - y_3^2 - x_1x_2)^2 + \frac{3}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{2}{3}\sqrt{3}\,y_3\right)^2. \tag{38}$$

Wir behandeln zuerst (37). In diesem Falle ist F eine monoton wachsende Funktion von y_3 und nimmt daher den minimalen Wert für $y_3 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ an; dafür ist

$$F \geqq \left(\frac{3}{4} - x_1x_2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}\right)^2 \geqq \frac{3}{4}(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2).$$

Beachten wir $x_1 \geqq \frac{1}{2}$, und daß für alle reellen x_2 die Ungleichung $x_2^2 + x_2 \geqq -\frac{1}{4}$ gilt, so folgt $F > 1$. Für die Behandlung der Gleichung (38) wird F nach x_1 differenziert:

$$F_{x_1} = y_3(\sqrt{3} + 2x_2y_3) + 2x_1x_2^2 + \frac{1}{2}(3x_1 - x_2) > 0.$$

Also nimmt F den minimalen Wert für $x_1 = \frac{1}{2}$ an. Beachten wir noch $y_3^2 \leqq \frac{1}{3}\sqrt{3}\,y_3$, so folgt

$$F \geqq \left(1 - \frac{1}{2}x_2 - y_3^2\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + x_2 + 2y_3^2\right)^2.$$

Setzen wir jetzt $\frac{1}{2}x_2 + y_3^2 = x$, so wird

$$F \geqq (1 - x)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} + 2x\right)^2 = 1 + \frac{3}{16} + 4x^2 - \frac{1}{2}x > 1.$$

Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Um nun noch den Fall (31) zu erledigen, beachten wir, daß die Ungleichungen (27) jedenfalls für $y_1 \geqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ erfüllt sind: Nach (26) gilt nämlich

$$\operatorname{abs}(Z + S) \geqq \det Y \geqq \frac{3}{4}y_1^2.$$

Es sei $\mathfrak{B}_2$ derjenige Teil von $\mathfrak{B}$, in welchem $y_1 \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ist.

Lemma 4: Im Bereich $\mathfrak{B}_2$ *ist die Ungleichung* $\operatorname{abs}(Z+S) \geqq 1$ *mit* $= \begin{pmatrix} e & e \\ e & e \end{pmatrix}$ $(e = \pm 1)$ *eine Folge der Ungleichung* $\operatorname{abs} Z \geqq 1$.

Beweis: Es genügt wieder, nur den Fall $e = 1$ zu betrachten. Wir bilden die Differenz

$$F = \operatorname{abs}(Z+S)^2 - \operatorname{abs} Z^2 =$$
$$= |z_1 + z_2 - 2z_3|^2 - 2(x_1 + x_2 - 2x_3)(\det Y + x_3^2 - x_1 x_2) +$$
$$+ 2(y_1 + y_2 - 2y_3)(x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2x_3 y_3)$$

und beweisen, daß in $\mathfrak{B}_2$ überall $F \geqq 0$ ist. Es wird

$$F_{y_2} = (2 + 4x_3)(y_1 - y_3) + (2 + 4x_1)(y_2 - y_3) \geqq 0 .$$

Also nimmt F den minimalen Wert für den kleinstmöglichen Wert von y_2, d. h. für $y_2 = y_1$ an. Dafür ist

$$F = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4(y_1 - y_3)^2 - 2(x_1 + x_2 - 2x_3)(y_1^2 - y_3^2 + x_3^2 - x_1 x_2) +$$
$$+ 4(y_1 - y_3)(y_1(x_1 + x_2) - 2x_3 y_3) .$$

Für die Ableitung nach y_3 ergibt sich

$$F_{y_3} = (y_1 - y_3)(-8 - 4(x_1 + x_2) - 8x_3) \leqq 0 .$$

Also nimmt F den minimalen Wert für $y_3 = \frac{1}{2} y_1$ an. Dafür ist

(39) $$F = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + y_1^2(1 + 2x_3) +$$
$$+ 2(x_1 + x_2 - 2x_3)\left(\frac{1}{4} y_1^2 - x_3^2 + x_1 x_2\right).$$

Wir beachten nun, daß im ganzen Bereich $\mathfrak{B}_2$ die Abschätzung

(40) $$\left|\frac{1}{4} y_1^2 - x_3^2 + x_1 x_2\right| \leqq \left|\frac{1}{4} y_1^2 - x_3^2\right| + \frac{1}{4} \leqq \frac{1}{4}(1 + y_1^2)$$

gilt und fragen danach, für welche positiven a die Ungleichung

(41) $$\frac{1}{4}(1 + y_1^2) \leqq a y_1$$

im ganzen Intervall $\frac{1}{2}\sqrt{3} \leqq y_1 \leqq \frac{2}{3}\sqrt{3}$ erfüllt ist. Dies ist genau für $a \geqq \frac{7}{24}\sqrt{3}$ der Fall. Für diese a können wir F nach (40) und (41) folgendermaßen abschätzen:

$$F \geqq (|x_1 + x_2 - 2x_3| - a y_1)^2 + y_1^2(1 + 2x_3 - a^2) .$$

Es folgt $F \geqq 0$, falls $1 - a^2 + 2x_3 \geqq 0$ ist. Wir wählen für a den kleinstmöglichen Wert und setzen für x_3 im folgenden die Ungleichung $1 - a^2 + 2x_3 \leqq 0$ oder

(42) $$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} a^2 \geqq x_3 \geqq -\frac{1}{2} \qquad \left(a = \frac{7}{24}\sqrt{3}\right)$$

voraus. Wenn nun

(43) $$x_1 + x_2 - 2x_3 \leqq 0$$

sein sollte, bilden wir in (39) die Ableitung nach x_3 und erhalten

$$F_{x_3} = -4(1 + x_3)(x_1 + x_2 - 2x_3) + y_1^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 .$$

Wegen (42) ist diese Ableitung positiv. Also nimmt F den minimalen Wert für den kleinstmöglichen Wert von x_3, das bedeutet nach (43) für $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geqq -\frac{1}{2}$ an. Dafür ist aber nach (39) sicher $F \geqq 0$. Ist dagegen

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \geqq 0 ,$$

so schreiben wir

$$F = y_1^2(1 + 2x_3) + (x_1 + x_2 - 2x_3)H ,$$

wobei

$$H = x_1 + x_2 - 2x_3 + \frac{1}{2}y_1^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2$$

gesetzt ist. Da aufgrund von (42) die Abschätzung

$$2H = (2x_1 + 1)(2x_2 + 1) - (2x_3 + 1)^2 + y_1^2 \geqq 0$$

gilt, folgt wieder $F \geqq 0$. Damit ist Lemma 4 bewiesen und zugleich der Beweis von Satz 1 beendet.

§ 2. Notwendige Ungleichungen

Definitionen: 1. Das System der 9 Ungleichungen (7) *und* (8) *heiße* Ω_0, *das System der 19 Ungleichungen* (9) *und* (10) *heiße* Ω_1, *und das System der 28 Ungleichungen aus* Ω_0 *und* Ω_1 *heiße* Ω.

2. Jeder Ungleichung aus Ω *ist eine Fläche zugeordnet: Man erhält diese Fläche, indem in der betreffenden Ungleichung speziell das Gleichheitszeichen betrachtet wird. Das System der Flächen, die den Ungleichungen aus* Ω *bzw.* Ω_k $(k = 0, 1)$ *zugeordnet sind, heiße* Φ *bzw.* Φ_k.

3. Es sei Z *ein beliebiger Randpunkt von* $\mathfrak{F}$. *Wenn eine der Flächen aus* Φ *den Punkt* Z *enthält und in der Umgebung von* Z *ein fünfdimensionales Stück mit* $\mathfrak{F}$ *gemeinsam hat, so möge sie Randfläche von* $\mathfrak{F}$ *im Punkte* Z *heißen.*

4. Ist eine Fläche aus Φ *Randfläche von* $\mathfrak{F}$ *in mindestens einem Randpunkt von* $\mathfrak{F}$, *so möge sie schlechthin Randfläche von* $\mathfrak{F}$ *heißen.*

Ist $Z = X + iY$ ein beliebiger fester Punkt aus $\mathfrak{H}$, so gehört für jedes reelle $\lambda > 0$ auch der Punkt $Z(\lambda) = X + i\lambda Y$ zu $\mathfrak{H}$. Aufgrund von (15) und (26) ist der Ausdruck

$$F(\lambda) = \operatorname{abs}(CZ(\lambda) + D)$$

für jedes teilerfremde symmetrische Paar C, D mit *Rang* $C > 0$ eine monoton wachsende Funktion von λ, die für $\lambda \to \infty$ über alle Schranken wächst. Das hat zur Folge, daß die Ungleichungen (6) im Punkte $Z(\lambda)$ für hinreichend großes λ sämtlich erfüllt sind. Mit Hilfe dieser Tatsache werden wir drei Behauptungen beweisen:

I. Die Ungleichungen aus Ω_0 *sind für die Definition von* $\mathfrak{F}$ *notwendig.*

II. Die Flächen aus Φ_0 *sind Randflächen von* $\mathfrak{F}$.

III. Die beiden Aussagen: „Die Ungleichungen aus Ω_1 sind für die Definition n $\mathfrak{F}$ notwendig" und „Die Flächen aus Φ_1 sind Randflächen von $\mathfrak{F}$" sind uivalent.

Um den Beweis von Satz 2 vollständig zu machen, wird dann nur noch e Notwendigkeit der Ungleichungen aus Ω_1 zu zeigen sein. Das wird folgenderaßen geschehen: Zu jeder Ungleichung U_1 aus Ω_1 wird ein Randpunkt Z on $\mathfrak{F}$ und eine in Z beginnende Kurve angegeben werden. Diese Kurve wird e Eigenschaft haben, daß die Ungleichung U_1 in allen Kurvenpunkten, die nreichend nahe bei Z liegen, nicht erfüllt ist, die anderen Ungleichungen us Ω aber erfüllt sind. Die dabei verwendeten Randpunkte von $\mathfrak{F}$ sind gewisse, nfach zu bestimmende Fixpunkte der Modulgruppe. Nur für die beiden ngleichungen (10) mit $S = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}$ wird ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Es sei U_0 eine Ungleichung aus Ω_0. Dann wähle man zunächst Z_0 so, daß n Z_0 alle Ungleichungen aus Ω_0 bis auf die eine, U_0, erfüllt sind; das ist offenbar öglich. Daraufhin wähle man λ so groß, daß für $Z_0(\lambda)$ auch noch die Ungleichungen aus Ω_1 gelten. Im Punkte $Z_0(\lambda)$ sind dann alle Ungleichungen us Ω mit Ausnahme der einen Ungleichung U_0 erfüllt. Das bedeutet die otwendigkeit von U_0, und die Behauptung I ist bewiesen.

Offenbar kann ferner Z auf ∞^5 Weisen so gewählt werden, daß die Ungleichung U_0 in Z mit dem Gleichheitszeichen gilt und die übrigen Ungleiungen aus Ω_0 mit dem Größerzeichen erfüllt sind. Indem zu jeder Wahl on Z der Parameter λ so groß gewählt wird, daß in $Z(\lambda)$ sämtliche Ungleichungen aus Ω_1 mit dem Größerzeichen erfüllt sind, erkennt man, daß die lächen aus Φ_0 Randflächen von $\mathfrak{F}$ sind. Damit ist die Behauptung II bewiesen.

Zum Beweis der Behauptung III setzen wir zuerst voraus, eine Ungleichung U_1 aus Ω_1 sei notwendig für die Definition von $\mathfrak{F}$. Dann existiert ein Punkt Z_1 n $\mathfrak{H}$, in welchem U_1 nicht erfüllt ist, die übrigen Ungleichungen aus Ω aber rfüllt sind. Aus Stetigkeitsgründen können wir annehmen, daß die übrigen Ungleichungen aus Ω sogar mit dem Größerzeichen gelten. Dann ist U_1 sogar n einer vollen Umgebung von Z_1 nicht erfüllt, während die übrigen Ungleichungen aus Ω dort erfüllt sind. Ist nun Z ein beliebiger Punkt aus dieser Umgebung von Z_1, so bilden wir $Z(\lambda)$ und wählen $\lambda > 1$ gerade so, daß U_1 in (λ) mit dem Gleichheitszeichen gilt. Die übrigen Ungleichungen aus Ω sind n $Z(\lambda)$ mit dem Größerzeichen erfüllt. Die so gefundenen Punkte $Z(\lambda)$ bilden ine fünfdimensionale Punktmenge, sie liegen sämtlich auf der Fläche F_1, die er Ungleichung U_1 entspricht, und sie gehören zu $\mathfrak{F}$. Damit ist gezeigt, daß F_1 Randfläche von $\mathfrak{F}$ ist. Setzen wir umgekehrt voraus, daß F_1 Randfläche von $\mathfrak{F}$ st, so gibt es einen Punkt, in dem U_1 mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist, die übrigen Ungleichungen aus Ω aber mit dem Größerzeichen. Aus Stetigkeitsgründen folgt die Notwendigkeit von U_1 für die Definition von $\mathfrak{F}$. Damit ist uch die Behauptung III bewiesen.

Lemma 5: Die beiden Flächen $|z_1| = 1$ und $\operatorname{abs} Z = 1$ sind Randflächen von $\mathfrak{F}$ m Punkte $Z_1 = iE$.

Beweis: Der Punkt Z_1 erfüllt alle Ungleichungen aus Ω. Das Gleichheitszeichen steht genau in den folgenden Fällen:

$$y_3 \geqq 0, \quad y_2 \geqq y_1, \quad |z_1| \geqq 1, \quad |z_2| \geqq 1, \quad \operatorname{abs} Z \geqq 1 . \tag{44}$$

Ist $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so gilt im Punkte

$$Z(\varepsilon) = i \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & 0 \\ 0 & (1-\varepsilon)^{-1} \end{pmatrix}$$

die Ungleichung $|z_1| < 1$; die übrigen der Ungleichungen (44) bleiben erfüllt. Ebenso bleiben die Ungleichungen aus Ω, die in (44) nicht vorkommen, erfüllt, weil sie in Z_1 mit dem Größerzeichen gelten und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} Z(\varepsilon) = Z_1$$

ist. Dieser letzte Schluß wird in allen folgenden Beweisen wiederkehren und soll daher nicht mehr besonders erwähnt werden. Damit ist die Behauptung für die Fläche $|z_1| = 1$ bewiesen. Für die Fläche $\operatorname{abs} Z = 1$ ergibt sich die Behauptung, wenn man

$$Z(\varepsilon) = i \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Lemma 6: Die Fläche $|z_2| = 1$ ist Randfläche von $\mathfrak{F}$ im Punkte

$$Z_2 = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \left(\varrho = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}\right).$$

Beweis: Der Punkt Z_2 befriedigt alle Ungleichungen aus Ω; das Gleichheitszeichen steht genau in

$$x_1 \geqq -\frac{1}{2}, \quad y_3 \geqq 0, \quad |z_1| \geqq 1, \quad |z_2| \geqq 1, \tag{45}$$
$$\operatorname{abs}(Z + S) \geqq 1 \quad \textit{für} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt im Punkte

$$Z(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\varepsilon & 0 \\ 0 & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

die Ungleichung $|z_2| < 1$, während alle anderen der Ungleichungen (45) erfüllt bleiben. Insbesondere gilt für die beiden letzten dieser Ungleichungen, wenn nur das absolute Glied und lineare Glieder in ε berücksichtigt werden:

$$\operatorname{abs}(Z(\varepsilon) + S)^2 = 1 + 2\varepsilon(\sqrt{3} - 1) + O(\varepsilon^2) > 1 .$$

Lemma 7: Die Fläche $|z_1 + z_2 - 2z_3 + e| = 1$ $(e = \pm 1)$ ist Randfläche von $\mathfrak{F}$ im Punkte

$$Z_3 = \frac{e}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Der Beweis wird für den Fall $e = 1$ durchgeführt. In diesem Fall erfüllt Z_3 alle Ungleichungen aus Ω, und zwar mit dem Gleichheitszeichen

genau die folgenden:

$$\frac{1}{2} \geqq x_3, \quad y_1 \geqq 2y_3, \quad y_2 \geqq y_1, \tag{46}$$
$$|z_1| \geqq 1, \quad |z_2| \geqq 1, \quad |z_1 + z_2 - 2z_3 + 1| \geqq 1.$$

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gelten im Punkte

$$Z(\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}(1-\varepsilon)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Ungleichungen

$$|z_1| < 1, \quad |z_2| < 1, \quad |z_1 + z_2 - 2z_3 + 1| < 1,$$

während die anderen der Ungleichungen (46) erhalten bleiben. Man erreicht wieder $|z_1| \geqq 1$ und $|z_2| \geqq 1$, indem man x_1 und x_2 von Null an mit entgegengesetztem Vorzeichen wachsen läßt, derart, daß stets $x_1 + x_2 = 0$ bleibt. Die Ungleichung $|z_1 + z_2 - 2z_3 + 1| < 1$ ändert sich dabei nicht.

Die beiden folgenden Lemmas sollen gemeinsam bewiesen werden:

Lemma 8: Die beiden Flächen $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ *mit*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \qquad (e = \pm 1)$$

sind Randflächen von $\mathfrak{F}$ *im Punkte* $Z_4 = e\varrho^e E$.

Lemma 9: Die beiden Flächen $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ *mit*

$$S = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix} \qquad (e = \pm 1)$$

sind Randflächen von $\mathfrak{F}$ *im Punkte*

$$Z_5 = \begin{pmatrix} e\varrho^e & 0 \\ 0 & -e\varrho^{-e} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Der Beweis wird für den Fall $e = 1$ durchgeführt. Die beiden Punkte $Z_4 = \varrho E$ und $Z_5 = \begin{pmatrix} \varrho & 0 \\ 0 & -\varrho^{-1} \end{pmatrix}$ genügen allen Ungleichungen aus Ω. Das Gleichheitszeichen steht für beide Punkte genau in folgenden Ungleichungen:

$$x_1 \geqq -\frac{1}{2}, \quad y_3 \geqq 0, \quad y_2 \geqq y_1, \quad |z_1| \geqq 1, \quad |z_2| \geqq 1. \tag{47}$$

Für Z_4 steht das Gleichheitszeichen außerdem noch in

$$x_2 \geqq -\frac{1}{2}, \quad \operatorname{abs}(Z + S) \geqq 1 \quad \textit{für} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{48}$$

und für Z_5 steht das Gleichheitszeichen außer in (47) noch in

$$\frac{1}{2} \geqq x_2, \quad \operatorname{abs}(Z + S) \geqq 1 \quad \textit{für} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{49}$$

Es sei nun ε eine positive oder negative Zahl, deren Absolutbetrag hinreichend klein ist. Für $Z^* = Z_4, Z_5$ bilden wir

$$Z(\varepsilon) = Z^* + (\varepsilon + i|\varepsilon|)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \mp\frac{1}{2} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & |\varepsilon| \\ |\varepsilon| & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Für diesen Punkt bleiben alle Ungleichungen (47) und jeweils die erste der Ungleichungen (48) und (49) erhalten. Bezeichnen wir ferner den Realteil des Punktes $Z(\varepsilon) + S$ mit $R = \begin{pmatrix} r_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & r_2 \end{pmatrix}$, so wird

$$\text{(50)} \qquad \operatorname{abs}(Z(\varepsilon) + S)^2 = \left(\frac{3}{4} - r_1 r_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}(r_1 + r_2) - 2\varepsilon|\varepsilon|\right)^2 .$$

Für $Z^* = Z_4$ ist dieser Ausdruck aufgrund von (48) in den folgenden vier Fällen

$$\text{(51)} \qquad R_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad R_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \varepsilon \\ \varepsilon & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

zu untersuchen. Für $\varepsilon < 0$ wird

$$\text{(52)} \qquad \operatorname{abs}(R_1 + i\,Y(\varepsilon)) < 1\,, \quad \operatorname{abs}(R_k + i\,Y(\varepsilon)) > 1 \qquad (k = 2,3,4).$$

Das bedeutet, daß $\operatorname{abs} Z = 1$ Randfläche von $\mathfrak{F}$ im Punkte Z_4 ist. Für $\varepsilon > 0$ wird

$$\text{(53)} \qquad \operatorname{abs}(R_2 + i\,Y(\varepsilon)) < 1\,, \quad \operatorname{abs}(R_k + i\,Y(\varepsilon)) > 1 \qquad (k = 1,3,4).$$

Das bedeutet, daß die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Randfläche von $\mathfrak{F}$ im Punkte Z_4 ist. Damit ist Lemma 8 bewiesen. Für $Z^* = Z_5$ ist der Ausdruck (50) aufgrund von (49) ebenfalls in den vier Fällen (51) zu untersuchen. Jetzt bedeutet aber (52), daß die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ mit $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Randfläche von $\mathfrak{F}$ im Punkte Z_5 ist; und (53) bedeutet dasselbe für die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ist auch Lemma 9 bewiesen.

Lemma 10: Die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ *mit* $S = \begin{pmatrix} e & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$ $(e = \pm 1)$ *ist Randfläche von* $\mathfrak{F}$ *im Punkte*

$$Z_6 = -\frac{e}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Beweis dieses Lemmas verläuft völlig analog zum Beweis des nächsten, es müssen nur die beiden Variablen z_1 und z_2 vertauscht werden, so daß nur dieses folgende Lemma bewiesen werden soll.

Lemma 11: Die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ *mit* $S = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & e \end{pmatrix}$ $(e = \pm 1)$ *ist Randfläche von* $\mathfrak{F}$ *im Punkte*

$$Z_7 = -\frac{e}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beweis: Der Beweis wird für $e = 1$ durchgeführt. Der Punkt Z_7 erfüllt dann alle Ungleichungen aus Ω, und zwar mit dem Gleichheitszeichen genau die folgenden:

$$\text{(54)} \qquad x_2 \geqq -\frac{1}{2}\,, \quad x_3 \geqq -\frac{1}{2}\,, \quad y_1 \geqq 2\,y_3\,, \quad y_2 \geqq y_1\,, \quad |z_1| \geqq 1$$

und

$$\text{(55)} \qquad \operatorname{abs}(Z + S) \geqq 1 \quad \textit{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ür hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ wird der Punkt

$$Z(\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\varepsilon & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

etrachtet. Für ihn bleiben die Ungleichungen (54) erhalten. Für die Ungleichungen (55) folgt im Falle $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Abschätzung

$$\operatorname{abs} Z^2(\varepsilon) = \left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + \varepsilon^2 > 1$$

nd im Falle $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ die Abschätzung

$$\operatorname{abs}(Z(\varepsilon) + S)^2 = \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right)^2 + \varepsilon^2 = 1 - \varepsilon + \frac{5}{4}\varepsilon^2 < 1 .$$

Lemma 12: Die Fläche $\operatorname{abs}(Z + S) = 1$ *mit* $S = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}$ $(e = \pm 1)$ *ist Randfläche von* $\mathfrak{F}$ *im Punkte*

$$Z_8 = \frac{e}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{3}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Beweis: Der Beweis wird für $e = 1$ durchgeführt. Der Punkt Z_8 erfüllt ann alle Ungleichungen aus Ω, und zwar mit dem Gleichheitszeichen genau ie folgenden:

6) $\quad y_1 \geqq 2y_3 , \quad y_2 \geqq y_1 , \quad |z_1| \geqq 1 , \quad |z_2| \geqq 1 , \quad |z_1 + z_2 - 2z_3 - 1| \geqq 1$

nd

7) $\quad \operatorname{abs}(Z + S) \geqq 1 \quad$ *für* $\quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ei $\varepsilon > 0$ hinreichend klein und a eine positive noch zu bestimmende Zahl. ür den Punkt

$$Z(\varepsilon) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-3\varepsilon \\ -1-3\varepsilon & 1 \end{pmatrix} + \frac{i}{3}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 2 & 1-2a\varepsilon \\ 1-2a\varepsilon & 2 \end{pmatrix}$$

leiben dann die Ungleichungen (56) erhalten. Bezeichnen wir ferner den ealteil von $Z(\varepsilon) + S$ mit

$$R - \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_3 \\ r_3 & r_2 \end{pmatrix} - \varepsilon\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

o wird, wenn ε^2 und noch höhere Potenzen von ε vernachlässigt werden:

$$F = \operatorname{abs}(Z(\varepsilon) + S)^2 = \left(\frac{2}{3} + r_3^2 - r_1 r_2 + \varepsilon\left(\frac{8}{9}a - 2r_3\right)\right)^2 + \\ + \frac{8}{9}(r_1 + r_2 - r_3 + \varepsilon(1 + 2ar_3))^2 + O(\varepsilon^2) .$$

ieser Ausdruck ist nach (57) in den folgenden vier Fällen

$$R_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad R_4 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

u untersuchen. Für R_k mit $k = 1, 2$ wird

$$F_k = 1 + 2\varepsilon\left(\frac{8}{9}a + \frac{2}{3}\right) + O(\varepsilon^2) > 1 .$$

Für R_3 ergibt sich die Gleichung

$$F_3 = 1 + 2\varepsilon\left(\frac{8}{9}a - \frac{2}{3}\right) + O(\varepsilon^2),$$

und schließlich für R_4 die Gleichung

$$F_4 = 1 + 2\varepsilon\left(\frac{8}{9}a - \frac{4}{3}\right) + O(\varepsilon^2).$$

Für alle Zahlen a mit $\frac{3}{4} < a < \frac{3}{2}$ und hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gilt also $F_3 > 1$ und $F_4 < 1$, womit Lemma 12 bewiesen ist.

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß auch die beiden Ungleichungen

$$\text{abs}(Z + S) \geqq 1 \qquad S = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & -e \end{pmatrix}, e = \pm 1 \tag{58}$$

zur Definition von $\mathfrak{F}$ notwendig sind. Aufgrund von Lemma 1 genügt es, den Fall $e = 1$ zu behandeln. Wir betrachten die Punkte

$$Z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & x \\ x & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ \frac{1}{4}\sqrt{3} & y \end{pmatrix} \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{8},\ y \geqq 1\right) \tag{59}$$

Offenbar erfüllen diese Punkte alle Ungleichungen aus Ω_0. Abgesehen von den drei Ungleichungen

$$\text{abs}(Z + S_k) \geqq 1 \qquad (k = 1,2,3) \tag{60}$$

mit

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

genügen die Punkte (59) aber auch den Ungleichungen aus Ω_1, wie jetzt gezeigt werden soll. Die vier Ungleichungen (9) sind erfüllt. Mit $S = \begin{pmatrix} s_1 & s_3 \\ s_3 & s_2 \end{pmatrix}$ wird

$$\text{abs}(Z + S)^2 = \left(-\left(s_1 - \frac{1}{2}\right)\left(s_2 + \frac{1}{2}\right) + (s_3 + x)^2 + \frac{1}{2}y\sqrt{3} - \frac{3}{16}\right)^2 + \tag{61}$$
$$+ \left(y\left(s_1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(s_2 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\ (s_3 + x)\right)^2.$$

In den Fällen $S = \begin{pmatrix} -1 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 1 \end{pmatrix}$ beachten wir nur das erste Quadrat auf der rechten Seite:

$$\text{abs}(Z + S) \geqq \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{16} > 1.$$

Auch in den Fällen $S = \begin{pmatrix} 0 & e \\ e & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ beachten wir in (61) rechts nur das erste Quadrat:

$$\text{abs}(Z + S) \geqq -\frac{1}{4} + (1 - x)^2 + \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{16} \geqq \frac{21}{64} + \frac{1}{2}\sqrt{3} > 1.$$

Es bleiben noch die drei Fälle $S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ zu untersuchen. In den ersten beiden dieser Fälle beachten wir in (61) rechts nur das zweite Quadrat:

$$\text{abs}(Z + S_4) \geqq \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{16}\sqrt{3} > 1,$$

$$\text{abs}(Z + S_5) \geqq \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} > 1.$$

m letzten Fall wird schließlich

$$\text{abs}(Z+S_6)^2=\left(-\frac{1}{4}+x^2+\frac{1}{2}y\sqrt{3}-\frac{3}{16}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)^2\geqq$$

$$\geqq\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)^2=1+\frac{1}{16}(7-4\sqrt{3})>1\,.$$

Es handelt sich jetzt darum, die drei kritischen Ungleichungen (60) zu untersuchen. Im folgenden werden die beiden positiven Zahlen

$$\xi_1=\frac{1}{4}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,,\qquad \xi_2=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{3}{4}$$

benötigt. Sie stehen in der folgenden Größenbeziehung zueinander:

$$0<\xi_1<\xi_2<\frac{1}{8}\,.$$

Wir setzen

$$H_k=\text{abs}(Z+S_k)^2 \qquad (k=1,2,3) \tag{62}$$

und fragen, für welche x die Beziehung $H_2>H_3$ gilt. Es ist

$$H_2-H_3=-x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{16}\,.$$

Weil die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{16}=0$ die Zahl $x=\xi_2$ ist, gilt $H_2>H_3$ sicher für $0\leqq x<\xi_2$. Wir fragen ferner danach, für welche x die Ungleichung $H_1>H_2$ im ganzen Intervall $y\geqq 1$ erfüllt ist. Es gilt

$$H_1-H_2=x^2+xy\sqrt{3}-\frac{3}{16}\geqq x^2+x\sqrt{3}-\frac{3}{16}.$$

Die positive Lösung der quadratischen Gleichung $x^2+x\sqrt{3}-\frac{3}{16}=0$ ist $x=\xi_1$. Beschränken wir daher x auf das Intervall

$$\xi_1<x<\xi_2\,, \tag{63}$$

so gilt für alle $y\geqq 1$ die Beziehung

$$H_1>H_2>H_3\,. \tag{64}$$

Wir untersuchen jetzt den Ausdruck H_2 genauer und bilden dazu die partiellen Ableitungen nach x und y:

$$H_2=\left(x^2+\frac{1}{2}y\sqrt{3}-\frac{7}{16}\right)^2+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)^2, \tag{65}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x}=4x\left(x^2+\frac{1}{2}y\sqrt{3}-\frac{7}{16}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right), \tag{66}$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial y}=\sqrt{3}\left(x^2+\frac{1}{2}y\sqrt{3}-\frac{7}{16}\right)+\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right). \tag{67}$$

Aus (66) folgt sofort

$$\frac{\partial H_2}{\partial x}<0 \qquad \textit{für}\quad y=1,\ x=\frac{1}{8}\,. \tag{68}$$

Wir beweisen ferner

$$H_2<1 \qquad \textit{für}\quad y=1,\ x=\xi_1\,. \tag{69}$$

Nach (65) gilt nämlich für die Werte $y=1, x=\frac{1}{4}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ die Gleichung

$$H_2=\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{4}\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{8}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\right)^2=$$
$$=1+\frac{1}{64}\left(421+120\sqrt{3}-180\sqrt{5}-60\sqrt{15}\right).$$

Beachten wir $\sqrt{5}>\frac{89}{40}$, so folgt

$$H_2<1+\frac{1}{64}\left(421+120\sqrt{3}-\frac{9\cdot 89}{2}-\frac{3\cdot 89}{2}\sqrt{3}\right).$$

Wegen $\frac{9\cdot 89}{2}>400$ und $\frac{3\cdot 89}{2}>133$ ergibt sich schließlich

$$H_2<1+\frac{1}{64}\left(21-13\sqrt{3}\right)<1.$$

Damit ist (69) bewiesen.

Da der Ausdruck $\frac{\partial H_2}{\partial x}$ nach (66) für $y=1$ eine monoton wachsende Funktion von x ist, die für $x=\frac{1}{8}$ nach (68) kleiner als Null ist, gilt

$$\frac{\partial H_2}{\partial x}<0 \qquad \text{für} \quad y=1,\ 0\leqq x\leqq\frac{1}{8}.$$

Also ist H_2 für $y=1$ im ganzen Intervall $0\leqq x\leqq\frac{1}{8}$ eine monoton fallende Funktion von x. Hieraus folgt unter Benutzung von (69) die Ungleichung

$$H_2<1 \qquad \text{für} \quad y=1,\ \xi_1<x<\xi_2 \tag{70}$$

Nach (67) ist für $y\geqq 1$ und $\xi_1<x<\xi_2$ der Ausdruck $\frac{\partial H_2}{\partial y}>0$. Also ist H_2 für jedes x aus dem Intervall (63) eine monoton wachsende Funktion von y. Für $y=1$ ist diese nach (70) kleiner als 1. Wir vergrößern dann y gerade soweit, bis $H_2=1$ wird. Nach (64) gilt dann für jedes x aus dem Intervall (63) die Beziehung

$$H_1>H_2=1>H_3.$$

Beachten wir jetzt (62), so folgt die Existenz eines Punktes (59), der alle Ungleichungen aus Ω mit Ausnahme der einen Ungleichung (60) für $k=3$ erfüllt. Das besagt gerade die Notwendigkeit der Ungleichung (58) für $e=1$.

Damit ist die Notwendigkeit der Ungleichungen aus Ω gezeigt und der Beweis von Satz 2 beendet.

Literatur

[1] SIEGEL, C. L.: Einführung in die Theorie der Modulfunktionen n-ten Grades. Math. Ann. **116**, 617—657 (1939). — [2] SIEGEL, C. L.: Symplectic Geometry. Amer. J. Math. **65**, 1—86 (1943). — [3] MINKOWSKI, H.: Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. J. reine angew. Math. **129**, 220—274 (1905). — [4] SIEGEL, C. L.: Einheiten quadratischer Formen. Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **13**, 209—239 (1940). — [5] DEDEKIND, R.: Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. J. reine angew. Math. **83**, 265—292 (1877).

(Eingegangen am 5. Februar 1959)

Druck: Brühlsche Universitätsdruckerei, Gießen

Lebenslauf

Ich, Erhard Gottschling, wurde am 15. Oktober 1932 in Lodz in Polen geboren. Bis 1940 war ich polnischer Staatsangehöriger, von diesem Zeitpunkt an deutscher. In Lodz lebte ich bis 1946. Dort besuchte ich vier Jahre die Grundschule, danach die Oberschule in Pabianice. Meine Schulausbildung endete 1952 mit der Reifeprüfung an der Oberschule in Stadthagen (Schaumburg-Lippe).

Mein Studium begann in Göttingen. Dort bestand ich am 15.5.1954 das Diplom-Vorexamen in Mathematik. Es folgten drei Studiensemester in Zürich. Nach meiner Rückkehr nach Göttingen legte ich am 20.5.1957 das Diplom-Hauptexamen in Mathematik ab.

Allen meinen wissenschaftlichen Lehrern möchte ich an dieser Stelle meinen Dank für wertvolle Anregungen aussprechen. In Göttingen waren es die Professoren: R. Becker, M. Deuring, G. Lyra, W. Maak, K. Reidemeister, K. Stellmacher, W. Tollmien, C.F.v. Weizsäcker und in Zürich: A. Borel, H. Hopf, R. Nevanlinna, W. Pauli, A. Pfluger, G. Polya, B.L.v.d. Waerden. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. C.L. Siegel, der auch die Anregung zu meiner Dissertation gab.